Anläßlich der Eröffnung des Wintersemesters 1990/91 an der Universität des Saarlandes hielt Hotz den im folgenden abgedruckten Festvortrag. Die Vortragsform wurde beibehalten, um dem Leser die Atmosphäre des Auditorium Maximum möglichst authentisch zu vermitteln.

Algorithmen, Sprachen und Komplexität[1]

Günter Hotz

Was ist „Informatik“?

Die Informatik ist die Wissenschaft, die untersucht, wie man Computer bauen sollte und wie man sie vorteilhaft verwendet. Sie konstruiert Sprachen, in denen man dem Computer mehr oder weniger detailliert sagen kann, was er tun soll. In diesem Zusammenhang wird in der Informatik natürlich auch über Sprachen und Programmierung grundsätzlich nachgedacht. Dabei gewonnene Resultate besitzen über die Informatik hinausgehendes Interesse, ja sie können zum allgemeinen Selbst- und Weltverständnis des Menschen beitragen.
Hierüber möchte ich Ihnen berichten. Dazu muß ich zunächst ein wenig ausholen und mich auf ein Gebiet begeben, über das mancher Kollege hier im Raum sicherlich kompetenter sprechen könnte.

1. Über Sprache und Verstehen

Die Sprache: Wesentliches Element im Weltverstehen

Der einzelne Mensch, losgelöst von der Gesellschaft, vermöchte wenig von der Welt zu verstehen, denn der Mensch erfährt und benötigt Belehrungen von Kind auf. Hierbei erlernt er Sprache, alle Belehrung und bedient sich mehr und mehr der Sprache. So ist die Sprache ein ganz wesentliches Element im Weltverstehen. Zunächst erscheint sie uns nur als Medium, das den Gedankenaustausch vermittelt, beobachten wir uns aber selbst beim Denken – was nicht ganz leicht ist –, dann stellen wir fest, daß Sprache nicht nur Gedanken vermittelt, sondern daß sie auch mit Träger des Denkens ist. Sicher ist Sprache im Sinne des geschriebenen und gesprochenen Wortes nicht der alleinige Träger des Denkens, denn auch die durch das Auge vermittelte räumliche Vorstellung hat daran einen wesentlichen Anteil. Jedes Wort regt in uns eine Fülle von Assoziationen an und nicht allein das Wort, sondern die Reihenfolge, in der die Wörter aufeinander folgen, werden von einem komplizierten Prozeß begleitet, der schließlich aus der Fülle der mit den einzelnen Wörtern mitklingenden Vorstellungen die Bedeutung und das Verständnis eines Satzes oder schließlich eines Textes ermittelt. Aus der Sprache allein kann also das Denken nicht verstanden werden.

Simplex sigilum veri

Nun ist es aber doch auch so, daß wir durch die Verwendung der Sprache anderen unsere Vorstellungen vermitteln können, und darüber hinaus sind wir auch in der Lage, in vielen Dingen in hohem Grade Übereinstimmung zu erzielen, ja sogar zu erzwingen. Jeder hat sicher schon einmal die zwingende Kraft eines mathematischen Beweises in der Schule erfahren. Dies berechtigt uns zu dem Glauben, daß es vielleicht einige wenige, zur Sprache hinzutretende, allen Menschen gemeinsame Grundprinzipien gibt, die unser Denken leiten. Wir wollen in diesem Vortrag ein solches Grundprinzip, nämlich das der „Einfachheit“ herausarbeiten und vom Standpunkt der Informatik aus beleuchten.

Mathematik als Sprache

Die Mathematik als Disziplin, in der man, wie bereits gesagt, Zustimmung erzwingen kann, sollte hier, ebenso wie generell die naturwissenschaftlichen Theorien, geeignet sein, etwas Licht auf den Vorgang des Verstehens und des Akzeptierens von Theorien zu werfen. Es gibt angesehene Mathematiker [2], die die Mathematik geradezu als Sprache auffassen – mit einer sehr fein ausgeprägten Grammatik –, und die Naturwissenschaften verwenden Mathematik als Sprache zur Fassung ihrer Erkenntnisse. Während mathematische Theorien ihrem Wesen nach widerspruchsfrei sind, ist das für die Naturwissenschaften nur ein Idealzustand, der aber praktisch nicht zutrifft, da es stets miteinander konkurrierende Theorien gibt und die Entscheidung für die eine oder die andere Theorie viele Jahre in Anspruch nehmen mag. Wie kann es zu solchem Streit kommen, und wie wird er ausgeglichen?
Zunächst ist es natürlich gar nicht klar, daß es überhaupt im mathematischen Sinne konsistente Theorien gibt, die die gesamte Natur zutreffend beschreiben. Natürlich

Professor Dr. rer. nat. Günter Hotz ist Inhaber des Lehrstuhl für angewandte Mathematik und Informatik an der Universität des Saarlandes in Saarbrücken.

[1] zugleich Band 32 der Reihe „Saarbrücker Universitätsreden“

beflügelt der Glaube an die Existenz einer solchen Theorie die Naturwissenschaftler, aber noch wissen wir nicht, ob es so ist, und der Glaube daran, daß es so sein könnte, ist erst wenige hundert Jahre alt. Muß die Natur sich denn nicht konsistent verhalten?

Gültigkeit naturwissenschaftlicher Theorien

Wenn man hierauf eine Antwort finden will, muß man sich zunächst einmal Gedanken darüber machen, was denn die Wurzeln sind, aus denen die Gültigkeit naturwissenschaftlicher Theorien erwächst. Hierzu befragt man am besten die hervorragenden Baumeister der Theorien. Man erfährt von allen, von Kepler über Leibniz und Newton bis hin zu Einstein, Heisenberg [3] und Poincaré [8], daß die Gültigkeit physikalischer Theorien auf zwei Säulen beruhe:

- Die Theorie muß korrekt sein.
- Die Theorie muß einfach sein.

Wann ist eine Theorie korrekt?

Eine Theorie ist korrekt, wenn sie die beobachteten Phänomene zutreffend wiedergibt. Dies akzeptiert man ohne Zögern. Aber eine Theorie soll auch *einfach* sein Ja, natürlich soll sie das. Ist das aber nicht eine sekundäre Forderung. Wie kann man diese beiden Forderungen, die so ungleichgewichtig erscheinen, einfach nebeneinanderstellen?

Ein Beispiel: Die Fallgesetze des Galilei

Wir schauen uns ein Beispiel an. Wir wählen als solches die Fallgesetze des Galilei aus. Wir hören unter anderem:

`Alle Körper fallen gleich schnell.`

Etwas präziser:

`Alle Körper fallen an jedem Ort und zu jeder Zeit auf der Erde mit einer konstanten Beschleunigung. Darüber hinaus gilt, daß diese Beschleunigung für alle Körper gleich ist.`

Natürlich ist das nicht richtig, wie jeder weiß. Steine und Blätter, die von den Bäumen segeln, fallen nicht gleich schnell.

Nachvollziehen, was nicht nachprüfbar ist

Wie konnte Galilei so etwas behaupten? Er zog sich fein aus der Schlinge. Er behauptete, die Gültigkeit dieses Gesetzes für das Vakuum und ein solches konnte und kann niemand herstellen. Darüber hinaus kann man das Experiment nicht an jedem Ort der Erde und zu jeder Zeit durchführen. Seine Behauptung konnte also durch kein Experiment widerlegt werden. Wie kann man etwas behaupten, und wie kann man es glauben, wenn man die Korrektheit des Gesetzes nicht nachprüfen kann? Ich möchte nicht darauf hinaus, daß wir heute ein Vakuum mit guter Approximation herstellen können und auch nicht auf indirekte Bestätigungen, z.B. über die Keplerschen Gesetze, sondern ich möchte den Schluß Galileis nachvollziehen können.

Das Fallgesetz: Das zweiteinfachste denkbare Gesetz

Von einem gewissen Standpunkt aus ist sein Gesetz das zweiteinfachste denkbare Gesetz, das in Frage kommt. Das einfachste wäre: Alle Körper fallen mit konstanter Geschwindigkeit. Das zweiteinfachste ist: Alle Körper fallen so, daß sich ihre Geschwindigkeit in konstanter Weise ändert. Das einfachste ist offensichtlich falsch. Das zweite Gesetz gilt für schwere runde Körper mit guter Approximation. Man bemerkte leicht, daß bei den Abweichungen die Luft und die Form der Körper eine Rolle spielen. Lassen wir also einfach die Luft weg, so wird es schon stimmen! So einfach hat es sich Galilei nicht gemacht, wir aber haben nicht Zeit, seiner Begründung durch Gedankenexperimente weiter zu folgen. Hätten wir als Beispiel das Gravitationsgesetz ausgewählt, dann würden wir gesehen haben, daß es sich um das fünfteinfachste Gesetz handelt, wenn wir die bekannten Grundrechenarten als adäquates Mittel zur Beschreibung von Naturgesetzen zugrunde legen.

Was kennzeichnet die einfache Theorie?

Wir bemerken, daß die Korrektheit des Gesetzes streng genommen weder widerlegt noch bestätigt werden konnte. Aber das Gesetz gab die einfachste approximative Erklärung des Sachverhaltes. Somit erscheint uns nun das Prinzip der Einfachheit auf das engste mit dem Prinzip der Korrektheit verbunden, und nur beide vereint sind dazu imstande, eine Theorie zu begründen.

Der Doppelcharakter der Sprache

Was ist das aber *Einfachheit*, so fragen wir weiter? In unserem Beispiel brauchte Galilei die Begriffe der Geometrie, der Strecke, der Länge von Strecken und von Zeitabläufen. Würde er in seiner Sprache kein Wort für Geschwindigkeit vorgefunden haben, würde ihm das Gesetz so natürlich vielleicht nicht erschienen sein. Die Sprache, der wir uns bedienen, ist an unseren Entdeckungen und Einsichten wesentlich beteiligt, und so ist die Pflege der Sprache von grundlegender Bedeutung für die Wissenschaft. Neue Einsichten führen zu Entwicklungen in der Sprache, Sprache speichert auf diese Weise Erkenntnis und bereitet Entdeckungen vor.

Sehen wir Sprache in der geschilderten Weise als lebendig an, dann wird die Einschätzung der Komplexität von Theorien von der Entwicklung der Sprache abhängen, und es

Sprache und Originalität des Schöpfungsaktes

wird schwer sein, im konkreten Falle einzuschätzen, was von einer neuen Theorie der Sprache an sich zuzurechnen ist und was der Originalität des aktuellen Schöpfungsaktes. Unter dieser Sichtweise erscheint es nicht als unmöglich, daß Sprachen eine Entwicklung nehmen, von lokalen Erfolgen zu lokalen Erfolgen geführt, so daß sie schließlich nur noch eine sehr einseitige Weltsicht gewähren. Aus diesem Grunde ist es notwendig, der Wissenschaft viel Freiheit für eine spielerische Entwicklung von Theorien zu gewähren, von Theorien, die nicht durch einen großen Erfolgsdruck vielleicht von Erfolg zu Erfolg, aber schließlich doch auf einen Weg gezwungen werden, der in einer Sackgasse endet.

Ein Maß für die Einfachheit: Die Komplexität der Theorie

Wir haben gesehen, daß dem Begriff der Einfachheit eine fundamentale Bedeutung zukommt. Nach dem Bekenntnis vieler erfolgreicher Wissenschaftler ist *Einfachheit* aber noch völlig unverstanden. Das Gefühl für Einfachheit ist eng an das Verstehen geknüpft. Wenn wir vielleicht auch noch nicht sagen können, was Verstehen ist, so kann es doch möglich sein, daß wir Einfachheit messen können, denn wir messen vieles, was wir nicht verstehen, z.B. wiegen wir Menschen und messen auch ihre Geschwindigkeit, wenn sie sich bewegen. Das besagt zwar nicht sehr viel über die Menschen, aber über ihr Verhalten bei Zusammenstößen können wir immerhin gewisse Auskünfte geben.

Problem der Theorienbildung: Optimierung der Mitteilungslänge

Versuchen wir es also einmal mit verschiedenen Konzepten der Komplexität, die in der Informatik untersucht werden. Messen wir die Komplexität einer Theorie durch die Länge, die ihre Mitteilung erfordert und versuchen wir *Einfachheit* zu deuten durch „geringe Komplexität". So würde Theorienbildung zur Lösung eines Optimierungsproblems. Es gibt eine alte These, die besagt, daß sich jede gute Theorie auf sieben Seiten darstellen läßt. Einstein danach gefragt, meinte, daß er auch den Kern der allgemeinen Relativitätstheorie auf diesem Raum darstellen könne. Die Länge der Beschreibung einer Theorie ist also schon seit vielen Jahren ein interessantes Maß für diese.

2. Formale Sprachen und Algorithmen

Formale Sprache: Gestufte Abstraktion der natürlichen Sprache

Die Theorie der formalen Sprachen und der Algorithmen ist eine mathematische Theorie. Eine formale Sprache ist eine Abstraktion der natürlichen Sprachen. Diese Abstraktion hat verschiedene Stufen. In der höchsten Abstraktion bleibt von den natürlichen Sprachen so wenig übrig, daß man sich vielleicht darüber wundern kann, daß ein solches Gebilde noch von Interesse ist. Es bleiben nichts als bedeutungsleere Worte und eine Grammatik, die angibt, welche Wortfolgen als zur Sprache gehörig angesehen werden sollen. So ist z.B.: „Der Vogel fliegt grün" kein sinnvoller Satz, kann aber als im formalen Sinne korrekt gelten.

Grammatiken: Methoden zur Spezifikation von Zeichenfolgen

In der Theorie der formalen Sprache betrachtet man verschiedene Methoden, Folgen von Zeichen zu spezifizieren. Diese Spezifikationsmethoden heißen Grammatiken. Die Menge der bezüglich einer Grammatik korrekten Zeichenfolgen heißt *Sprache* genauer: die zu dieser Grammatik gehörige Sprache. Solch eine Grammatik kann z.B. aus einigen Mustersätzen bestehen und aus einer Menge von Regeln, die es erlauben, aus den Mustersätzen neue Sätze zu produzieren.

Die Regelsätze können sehr einfach sein, indem sie es erlauben, gewisse Zeichen in Sätzen stets durch gewisse Zeichenfolgen zu ersetzen. Die Regeln können durch Kontextbedingungen eingeschränkt werden. Diese Kontextbedingungen können sehr einfach sein oder auch so kompliziert, daß sie selbst einer recht aufwendigen formalen Definition bedürfen. Evtl. geht man sogar so vor, daß man nicht die korrekten Sätze durch Grammatiken charakterisiert, sondern die *komplementäre* Menge, nämlich genau diejenigen Sätze, die *nicht* zur Sprache gehören sollen.

In der Theorie behandelt man hauptsächlich zwei Fragen:

- Wie verhält sich die Ausdruckskraft verschiedener Grammatiktypen zueinander, sind z.B. gewisse Kontextbedingungen überflüssig?
- Wie stellt man fest, ob ein vorgewiesener Satz einer vorgegebenen Grammatik genügt? Man gebe Verfahren an, die es Maschinen bei Kenntnis der Grammatik erlauben, die Frage zu entscheiden.

Zum ersten Problemkreis würde auch die Frage zählen, ob zwei verschiedene Grammatiken die gleiche Sprache definieren, oder ob man in einer Grammatikklasse zu jeder Grammatik auch Grammatiken findet, die das Komplement zu der Sprache dieser Grammatik definieren.

Gebräuchliche Technik: Komplementärdefinitionen

Sie werden sich vielleicht wundern, warum ich schon wieder von dem Komplement von Sprachen spreche. Dies ist nicht nur eine spielerische Frage, sondern von der Methode, Formen durch ihr Komplement zu definieren, macht die Gesellschaft regen Gebrauch. Ich erinnere hierbei an die 10 Gebote, die, wie die meisten Regeln unserer Gesetzgebung, vorwiegend definieren, was nicht erlaubt ist Warum tut man das? Warum zählt man nicht besser auf, was man tun darf? Wir werden auf diese Frage zurückkommen.

Der Unterschied von Sprache und Algorithmus: Ein Beispiel

Zunächst müssen wir aber den Unterschied zwischen Sprache und Algorithmus ein wenig deutlich machen Hierzu betrachten wir das folgende Beispiel:
Wir stellen uns eine nach dem Muster eines Schachbrettes angelegte Stadt vor. Ein Fremder, der einen Ortskenner um eine Auskunft fragt, könnte folgende Antwort erhalten. „Die Stadt ist schachbrettartig angelegt. Sie befinden sich hier am Schnittpunkt der 7ten Ost-West-Straße mit der 13ten Nord-Süd-Straße. Ihr Ziel liegt im Schnittpunkt der 15ten Ost-West- mit der 3ten Nord-Süd-Straße. Die Numerierung der Straßen läuft von Ost nach West bzw. von Nord nach Süd." Mit dieser Information versehen kann sich der Fremde in der Stadt zurechtfinden.
Die Antwort hätte aber auch ganz anders ausfallen können: „Merken Sie sich die Zahl 13 und folgen Sie dieser Straße in Westrichtung. Wenn Sie eine Straße überqueren, zählen Sie von der gemerkten Zahl 1 ab. Das tun Sie so lange, bis Sie die Zahl 3 erhalten. Nun merken Sie sich die Zahl 7 und biegen links ab und zählen bei jeder Straßenüberquerung 1 zur gemerkten Zahl hinzu. Das tun sie so lange, bis Sie die Zahl 15 erhalten. Dann sind Sie am Ziel."
Im ersten Fall haben wir eine Übersicht über die Stadt erhalten und damit implizit die Beschreibung sehr vieler Wege, die den Fremden zum Ziel führen würden. Im zweiten Fall hat der Fremde nichts über die Stadt erfahren. Die Beschreibung des Weges ist zudem ebenso lang wie die erste Auskunft. Allerdings braucht der Fremde selbst nicht mehr nachzudenken, und wenn er sich auf seinem Weg nicht verzählt, wird er auch ans Ziel kommen.

Ein Algorithmus: Eine eindeutige Verfahrensvorschrift

Die zweite Auskunft ist ein Beispiel für einen Algorithmus. Ein Algorithmus ist also eine eindeutige Verfahrensvorschrift. In eine solche Vorschrift geht nicht nur das eigentliche Problem ein, dessen Lösung gesucht ist, sondern auch die Organisation der „Maschine", die den Lösungsalgorithmus durchführen soll. Da Maschine und Problemkreis i.a. wenig miteinander zu tun haben, kommen in dem Programm Elemente vor, von denen eine reine Problembeschreibung abstrahieren kann.

Die Negation als „Schalter"

Wir kommen zurück zur Negation als Sprachelement. Die Negation erlaubt es uns, sehr leicht zwischen Mengen und ihrem Komplement hin und her zu gehen. Wir betrachten den Fall, daß uns ein Verfahren, ein Programm gegeben ist, das es uns erlaubt, alle grammatikalisch richtigen Sätze auszudrucken. Dabei verfährt das Programm evtl. nicht systematisch in der Weise, daß es erst die kurzen und dann die längeren Sätze ausdruckt, sondern immer wieder geschieht es, daß das Programm zwischen bereits sehr langen Sätzen auch ganz kurze Sätze ausgibt. Es kann auftreten, daß es kein Programm gibt, das die gleichen Sätze in einer nach ihrer Länge sortierten Reihenfolge ausdruckt, da die Menge der Sätze unendlich groß sein könnte. Wenn wir im Besitz eines solchen Programmes sind, dann sagen wir mit einem gewissen Recht, daß wir die grammatikalisch richtigen Sätze *vorweisen* können.

Ein Algorithmus zur Bestimmung aller grammatikalisch richtigen Sätze ...

... kann keine Aussage über die grammatikalisch falschen Sätze treffen.

Dies genügt aber nicht, um für einen uns vorgegebenen Satz, der grammatikalisch falsch ist, mit Hilfe des Programmes die Auskunft zu erhalten, daß der Satz falsch ist. Das erscheint auf den ersten Blick überraschend, denn wir brauchen doch nur nachzusehen, ob der vorgegebene Satz unter den ausgedruckten Sätzen vorkommt. Auf den zweiten Blick sehen wir, daß das nicht funktioniert, da die Menge der korrekten Sätze unendlich groß sein kann und da ein kurzer Satz z.B. an der millionsten Stelle oder der milliardsten Stelle oder noch viel später stehen könnte. Da er falsch ist, wird er nirgends stehen, aber wir können das von dem Programm nicht erfahren.

Elemente formaler Sprachen

Wir sehen also, daß es einfache Sprachelemente gibt, die die Ausdruckskraft einer Sprache gewaltig steigern. Es fällt uns durch solche Spracherweiterungen sehr leicht, über Konzepte zu sprechen, die wir in dem oben beschriebenen Sinne nicht *vorweisen* können. Wir wollen das noch ein wenig ergänzen: Wir können auf einfache Weise formale Sprachen definieren, die wir nicht *vorweisen* können. Ja, man kann solche Sprachen definieren, von denen man weiß, daß sie selbst und zugleich ihr Komplement nicht *vorgewiesen* werden können. Indem man zur *Negation* als weitere Sprachelemente noch die Bildung von *Sprachpaaren* und durch einfache Regeln erzeugte *Übersetzungen* zwischen den Sprachen und die *Projektion* hinzunimmt, also einen Prozeß, den die

Sonne vornimmt, indem sie Schatten von den Körpern wirft, dann kann man eine unendliche Hierarchie von immer „weniger" *vorweisbaren* Sprachen definieren. Was für einen Sinn macht das im Rahmen exakter Naturwissenschaften? Müssen wir das nicht als Spielerei abtun und vielleicht in die Philosophische Fakultät oder in die Kunst verweisen?
Nun, ein Ziel dieses Vortrages besteht auch darin, zu erläutern, wie wir in unserem Naturverständnis sehr wesentlich Gebrauch von der Konstruktion solcher *transzendenter* oder *idealer* Gebilde machen, und daß unserem Verständnis vermutlich ohne solche Konstruktionen wesentliche Teile der Welt, die uns so zugänglich sind, verschlossen bleiben würden.
Zunächst wollen wir unsere Sicht aber noch etwas verfeinern. Dies geschieht in dem folgenden Abschnitt.

3. Komplexitätstheoretische Gesichtspunkte

Wir haben eben nur rein qualitativ über das Verhältnis von formalen Sprachen zu Algorithmen gesprochen. Nun soll unser Bild verfeinert werden, indem wir auch quantitative Aspekte aufnehmen.

Die Größe von Grammatiken und Programmen

Grammatiken und Programme haben auch eine Größe. Hierunter verstehen wir den Verbrauch an Tinte, die wir benötigen, um die Grammatik oder das Programm hinzuschreiben. Nun schreibt der eine größer oder kleiner als der andere, so daß wir entweder eine genormte Schrift zugrunde legen oder bei der Beurteilung der Größe gewisse Toleranzen zugestehen müssen. Letzteres macht es natürlich nur möglich, drastische Unterschiede zu erkennen.
Nun werden Sie vielleicht einwenden, daß der Verbrauch an Tinte im Zeitalter der Computer kein moderner Maßstab ist. Damit hätten Sie auch recht. Aber auch am Ressourcenverbrauch des Computers orientierte Maßstäbe haben ihre Tücken. Wir haben schon früher darauf hingewiesen, daß die Mitteilung des gleichen Sachverhaltes in Abhängigkeit von dem Entwicklungsstand einer Sprache kürzer oder länger ausfallen wird. Somit kann man auch in unserem tintenfreien Zeitalter die Größe von Mitteilungen nur dann sinnvoll maschinenunabhängig vergleichen, wenn diese Unterschiede sehr drastisch sind.

Die Laufzeit von Programmen

Neben der *Größe* der Programme spielt auch ihre Laufzeit eine wichtige Rolle. Was nutzt uns ein Programm, wenn es ewig an der Lösung eines Problemes arbeitet und erst dann fertig wird, wenn wir seiner Lösung nicht mehr bedürfen. Natürlich spielt nicht nur die Rechenzeit eine Rolle, sondern auch die *Größe des Speicherplatzes* – des Papieres, wenn wir wieder die Parallele zur Tinte verwenden wollen. Es würde uns wenig helfen, wenn die Maschine eine Speicherplatzgröße verlangen würde, die wir ihr nicht zur Verfügung stellen können.

Komplexitätsmäße für Programme ...

Damit haben wir mehrere Größen aufgezählt, mit denen wir Programme quantitativ beurteilen können, nämlich
- Programmgröße
- Laufzeit
- Speicherplatz.

Das gleiche Programm mag viele verschiedene Probleme bearbeiten können, so daß Laufzeit und Speicherbedarf i.a. auch von der Problemgröße abhängig sind. Die Unschärfe, die wir dem Maß der Programmlänge zugestehen, müssen wir auch der Laufzeit und dem Speicherbedarf zubilligen.
Die drei genannten Komplexitätsmaße sind nicht unabhängig voneinander. Man kann vielmehr *Laufzeit* gegen *Speicherplatz* und beide gegen die *Programmgröße* ausspielen. Vergröbernd können wir sagen, daß das Produkt der drei Größen also

```
Programmgröße * Laufzeit * Speicherbedarf
```

... und Maschinenressourcen

von den Problemen bestimmt ist. Wir bezeichnen diese drei Größen als die *Ressourcen* der Maschine. Wir müssen i.a. davon ausgehen, daß die Maschinenressourcen nicht in beliebiger Größe zur Verfügung stehen, sondern gewissen Beschränkungen unterliegen.
Nun kann man die o.g. qualitativen Aussagen über den Zusammenhang von sprachlich erfaßbaren Objekten und einer effektiven Vorweisbarkeit auch quantitativ verfeinern.

Komplexitätshierarchien

Man kann verschiedene Komplexitätshierarchien definieren, in denen jede Hierarchiestufe annähernd die gleiche Rolle spielt wie zuvor die qualitative Schwelle, die den grundsätzlich nicht vorweisbaren Bereich von Objekten von dem vorweisbaren trennt, siehe [7], [9]. Im Rahmen dieses Vortrages können wir über diese Resultate keinen

Grammatikgröße und Programmlänge: Ein Zahlenbeispiel

Überblick geben. An einem Sonderfall wollen wir aber doch demonstrieren, wie ungeheuer groß die Divergenz in Grammatikgröße und Programmlänge zur Nachprüfung der grammatikalischen Korrektheit von Sätzen werden kann. Dieser Sonderfall betrifft eine Einschränkung von Rechenzeit und Speicherplatz. Die Antwort auf die Korrektheitsfrage soll unmittelbar nach dem Lesen des letzten Zeichens erfolgen, und der dabei verwendete Speicher soll endlich und in seiner Größe nur von der Grammatik abhängig sein. Man kann die Grammatikklasse zur Beschreibung dieser Sprachen angeben, in der Programmlänge und Grammatikgröße in bestimmten Beispielen so zusammenhängen, wie die Zahlenpaare.

(1,2), (2,4), (3,8), (4,16),...,

also die Größe des Programmes wächst wie 2^n, wenn n die Größe der Grammatik ist. Erweitert man die Sprache zur Definition der Grammatik durch die Hinzunahme der Negation, dann kann man Beispiele dafür angeben, daß das Wachstum ungefähr wie die folgende Reihe zunimmt:

2, 4, 16, 60000, 10^{20000}, ...

Dies gilt nicht für alle Beispiele. Für manche erbringt die Einführung der Negation keinen Vorteil, so daß wir sehen, daß die Beurteilung der Komplexität von Objekten sehr stark davon abhängt, welche Beschreibungsmittel, kurz, welche Sprache und welche Algorithmen man dabei zugrunde legt.

*Das entscheidende Produkt: Zeit * Speicherplatz * Programmgröße*

Bevor wir zu unserer Ausgangsfrage zurückkehren, in wieweit „Einfachheit" in dem Sinne, wie wir den Begriff im Zusammenhang mit der Theorienbildung brauchen, durch den Komplexitätsbegriff erfaßt werden kann, möchte ich zwei Kollegen nennen, die an der Entwicklung dieser Theorie sehr beteiligt waren. Die Bedeutung des Produktes von *Zeit * Speicherplatz * Programmgröße* wurde in dieser Allgemeinheit von C. P. Schnorr entdeckt, der am weitesten gehende Satz über das Verhältnis von Rechenzeit und Speicherplatz stammt von W. J. Paul. Beide sind von Geburt Saarländer und haben in dieser Universität ihre Karriere begonnen.

4. Einfachheit und Komplexität

Zufälligkeit und Gesetzmäßigkeit

Wir können nun etwas deutlicher machen, daß Einfachheit von Theorien und Komplexität von Algorithmen oder Sprachen etwas miteinander zu tun haben. Hierzu nutzen wir die intuitiv faßbare Komplementarität von *Zufälligkeit* und *Gesetzmäßigkeit*. Es war die Meinung einiger hervorragender Wissenschaftler, siehe [12], daß man „Einfachheit" in dem hier gemeinten Sinne verstehen oder zumindest besser verstehen würde, wenn man den Begriff der *Zufälligkeit* verstünde. In dem Verständnis dieses Begriffes hat man aber entscheidende Fortschritte erzielt. Man kann in sehr präziser Weise zeigen, daß Zufälligkeit von Ereignisfolgen mit schwerer Berechenbarkeit dieser Folgen zu tun hat, siehe Schnorr [10]. Dies geht auf von Mises und schließlich Kolmogoroff zurück, deren Ideen sich mit denen aus anderen Quellen gespeisten Vorstellungen von Solomonoff [11] und Chaitin [1] trafen. Eine erste konsequente Durchführung und Absicherung dieses Konzeptes stammt von C.P Schnorr. Er hat darüber hinaus – auf meine Anregung hin – gezeigt, daß man die Komplexitätshierarchien umsetzen kann in Hierarchien von Zufälligkeit. Das bedeutet in anderen Worten, daß man den Streit um den wahren Begriff der Zufälligkeit begraben kann. Zufälligkeit ist in diesem Sinne nicht mehr absolut zu begreifen, sondern nur bezogen auf die Ressourcen, die zur Berechnung zur Verfügung stehen. Wie Komplexität in der Beurteilung von Ereignissen mitspielt, wollen wir an dem Beispiel eines Würfelexperimentes erläutern.

Transformierbar: Komplexitätshierarchien in Zufälligkeitshierarchien

Komplexität und Ereignis-Beurteilung: Ein Würfelexperiment

Es sei uns also ein Würfel gegeben, mit dem wir etwa 1000 mal werfen. Wir betrachten zwei Fälle:

Die Ereignisse ...

1. Fall: Wir entdecken in der Folge der geworfenen Zahlen keine Gesetzmäßigkeit.

2. Fall: Wir werfen 1000 Sechsen.

... und ihre Beurteilung

Wie beurteilen wir diese Resultate? Eine Antwort könnte wie folgt lauten:

Beide Wurffolgen besitzen die gleiche Wahrscheinlichkeit. Deshalb ist das Sichwundern in beiden Fällen angebracht, oder in keinem Fall.

Eine andere Antwort könnte die folgende sein:

Tausend Würfe und tausend Sechsen ist ausgeschlossen. Da gibt es nur die eine Erklärung: Der Würfel ist falsch. Vielleicht trägt jede Seite des Würfels eine „Sechs".

Welcher Antwort sollen wir folgen? Ich meine der zweiten. Wenn jemand noch nicht überzeugt ist, dann lassen wir ihn eine Million oder eine Milliarde Würfe mit dem gleichen Resultat tun. Wer würde nach einer Milliarde „Sechsen" noch einen Heller auf die „Eins" setzen?
Nun sehen Sie sich um: Niemand! Woran liegt das?
Hätte jemand den zufälligen Wurf exakt vorausgesagt, dann hätten wir ebenfalls die Korrektheit des Würfels mit Recht angezweifelt. Aber die 6er Folge hat niemand vorhergesagt und doch zweifeln wir. Der Grund liegt darin, daß die 6er Folge einem einfachen Gesetz genügt und daß auch einfache Varianten des Würfels vorstellbar sind, die solche Würfe produzieren könnten. Ein Würfel müßte sehr kompliziert aufgebaut sein, wenn er die vorhergesagte zufällige Folge mit Sicherheit produzieren sollte.
Die Menge der Würfe, die einfachen Gesetzmäßigkeiten genügen, ist klein gegenüber der Menge aller möglichen Würfe, und darum erregen solche Würfe mit Recht unsere Aufmerksamkeit. Aber die Erkennung solcher Gesetzmäßigkeiten hängt sehr von den Ressourcen ab, die uns zur Beurteilung zur Verfügung stehen.
Man kann, wie ich an anderer Stelle, siehe [4], [5], [6], ausgeführt habe, weitere Argumente dafür angeben, daß die Komplexität von Algorithmen eine gewisse Relevanz für die Beurteilung der Einfachheit von Theorien besitzt. Leider erlaubt es diese Gelegenheit nicht, darauf weiter einzugehen.

Schlußbemerkung

Ideale Elemente und die Welt

Wir haben gesehen, daß man in exakter Weise über viele Dinge sprechen kann, ohne daß diese *vorweisbar* sind. Wir schulden noch eine Antwort auf die Frage, ob das notwendig ist oder ob es sich nur um ein Spiel in einem elfenbeinernen Turm handelt. Wir wollen Elemente *ideal* nennen, wenn in unserer Welt kein Objekt vorgewiesen werden kann, das diesem Element entspricht.
Beispiele für solche Elemente sind die nicht berechenbaren reellen Zahlen. Von diesen gibt es unvergleichlich viel mehr als berechenbare reelle Zahlen. Man hat versucht, die Analysis ohne die Verwendung dieser reellen Zahlen aufzubauen, ist im Grunde aber damit gescheitert, da die Theorie viel zu kompliziert wird. So sehen wir bereits an diesem Beispiel, daß das Verständnis unserer Welt von sprachlichen Konstruktionen *idealer Elemente* getragen wird und daß das Kleben am Konkreten dem Verständnis unserer Welt nicht zuträglich ist. Wir brauchen also *ideale Elemente*, um die Welt zu verstehen, und es zeigt sich auch eine Divergenz zwischen Verstehen und Tun. Wir bewältigen aber das *Konkrete* durch die *Approximation des Idealen*. Auf diese Weise leitet das Verstehen das Tun. So sollten wir den Pegasus nicht in ein Joch mit dem Ochsen spannen, sondern wir sollten ihn fliegen lassen, und indem wir das tun, hilft er schließlich auch dem Ochsen dadurch, daß er ihm den Weg zeigt.

Bibliographie

[1] Chaitin, G. J.: On the length of programs for computing finite binary sequences JACM, Vol. 13, S. 547-569 (1966) und JACM, Vol. 16, S. 145-159 (1969).
[2] Grauert, H.: Physis und Hopostasis. Manuskript (1988).
[3] Heisenberg, W.: Der Teil und das Ganze. dtv-Taschenbuch.
[4] Hotz, G: Komplexität als Kriterium der Theorienbildung. Abh. der Akad. der Wissensch. und der Literatur, Mainz (1988).
[5] Hotz, G.: Was ist künstliche Intelligenz? Abh. der Akad. der Wissensch. und der Literatur, Mainz (1990).
[6] Hotz, G : Versprachlichung naturwissenschaftlicher Erkenntnis. In Sammelband „Sprache" des Studium Generale der Universität Heidelberg, SS 1990, Heidelberger Verlagsanstalt S. 133-152.
[7] Paul, W.-J.: Komplexitätstheorie. Teubner Verlag, Stuttgart (1978).
[8] Poincaré, H.: Wert der Wissenschaft. Teubner Verlag, Leipzig (1906).
[9] Reischuk, R.: Einführung in die Komplexitätstheorie. Teubner Verlag, Stuttgart (1990).
[10] Schnorr, C.-R: Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. LNM, Vol. 218, Springer Verlag (1971).
[11] Solomonoff, R. J.: A Formal Theory of Inductive Inference. In Form. Control 7 (1964).
[12] Weyl, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. Leibniz Verlag, München (1928).